

**Theorem 7.3** 如果 $\Sigma$ 是极大一致的Henkin集, 则存在赋值 $\sigma$ , 使得 $\sigma(A) = T$  iff  $A \in \Sigma$ .

**Proof.** 归纳证明。(补充以下情形)

情形(4)  $A = \forall xB$ 。任给个体域的个体 $v_k$ ,  $v_k$ 也是变元。令 $\sigma_k = \sigma(x, v_k)$ 。因为 $B$ 中只有有限个约束变元, 所有只有有限个 $y$ 使得 $B(x/y)$ 不合适。通过约束变元易字, 一定能够找到公式 $C$ , 使得 $B(x/y)$ 不合适时, 一定有 $C(x/y)$ 合适, 并且 $\vdash B \leftrightarrow C$ , 因此,  $\vdash \forall xB \leftrightarrow \forall xC$ 。

如果 $A \in \Sigma$ , 则因为 $A \vdash \forall xC$ , 所以 $\forall xC \in \Sigma$ 。任给 $v_k$ , 如果 $B(x/v_k)$ 合适, 则因为 $\forall xB \vdash B(x/v_k)$ , 所以 $B(x/v_k) \in \Sigma$ 。如果 $B(x/v_k)$ 不合适, 则 $C(x/v_k)$ 合适。又因为 $\forall xC \vdash C(x/v_k)$ , 所以 $C(x/v_k) \in \Sigma$ 。

由归纳假设, 如果 $B(x/v_k)$ 合适, 则 $\sigma(B(x/v_k)) = T$ 。如果 $B(x/v_k)$ 不合适, 则 $\sigma(C(x/v_k)) = T$ 。任给定义域中的个体 $v_k$ , 如果 $B(x/v_k)$ 合适, 则 $\sigma_k(B) = (B(x/v_k)) = T$ 。如果 $B(x/v_k)$ 不合适, 则 $\sigma_k(B) = \sigma_k(C) = \sigma(C(x/v_k)) = T$ , 所以,  $\sigma(\forall xB) = T$ 。

如果 $A \notin \Sigma$ , 则 $\neg \forall xB \in \Sigma$ , 所以存在变元 $v_k$ 使得 $\neg B(x/v_k) \in \Sigma$ 。由归纳假设 $\sigma(\neg B(x/v_k)) = T$ 得 $\sigma(B(x/v_k)) = F$ 。因此, 存在 $\sigma_k$ 使得 $\sigma_k(B) = \sigma_k(B(x/v_k)) = F$ 。这就证明了 $\sigma(\forall xB) = F$ , 即,  $\sigma(A) = F$ 。 ■